التمرين 1 :

نقبل أن : $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^{*2} \ : \ a \wedge b = 1 \Rightarrow a^2 \wedge b^2 = 1$.

نضع : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$.

لنحدد $S_n \wedge S_{n+1}$ ، لكل n من $\mathbb{N}^*$.

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. نفترض أن n زوجي : $\exists k \in \mathbb{N}^* \ , \ n = 2k$.

أ- بين أن لكل $k \in \mathbb{N}^*$ ، لدينا :

$$S_{2k} \wedge S_{2k+1} = (2k+1)^2 \left[k^2 \wedge (k+1)^2\right]$$

ب- أحسب : $k \wedge (k+1)$ لكل $k \in \mathbb{N}^*$.

جـ- أحسب $S_{2k} \wedge S_{2k+1}$ ، لكل $k \in \mathbb{N}^*$.

3. نفترض أن n فردي : $\exists k \in \mathbb{N} \ , \ n = 2k+1$.

أ- بين أن : $\forall k \in \mathbb{N} \ , \ (2k+1) \wedge (2k+3) = 1$.

ب- أحسب $S_{2k+1} \wedge S_{2k+2}$ ، لكل $k \in \mathbb{N}$.

4. بين أن : $\exists ! n \in \mathbb{N}^* \ , \ S_n \wedge S_{n+1} = 1$.

التمرين 2 :

I. ليكن x عددا حقيقيا.

1. تحقق من أن : $x^2 + 4 = (x^2+2)^2 - 4x^2$.
2. أكتب x^2+4 على شكل جداء ثلاثيتي الحدود من الدرجة الثانية بمعاملات نسبية.

II. ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq 2$. نضع : $d = A \wedge B$ حيث $A = n^2 - 2n + 2$ و $B = n^2 + 2n + 2$.

1. تحقق من أن $n^2 + 4$ ليس أوليا.
2. بين انه إذا كان m يقسم A و m يقسم n ، فإن m يقسم 2.
3. بين انه إذا كان m يقسم A و m يقسم B ، فإن m يقسم $4n$
4. نفترض أن n فردي.

أ- بين أن A و B فرديان واستنتج أن d فردي.

ب- بين أن d يقسم n .

جـ- بين أن d يقسم 2 ، ثم أن $A \wedge B = 1$.

5. نفترض أن n زوجي.

أ- بين أن 4 لا يقسم $n^2 - 2n + 2$.

ب- بين أنه يوجد عدد طبيعي فردي p بحيث $d = 2p$.

جـ- بين أن p يقسم n وأن $d = 2$.

التمرين 3 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 ، ثم تظنن رقمي الوحدات ورقم العشرات في الكتابة في النظمة ذات الأساس 10 للعدد u_n.
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+2} \equiv u_n \ [4]$.

استنتج أن : $\forall k \in \mathbb{N} \ , \ u_{2k} \equiv 2 \ [4]$.

وأن : $\forall k \in \mathbb{N} \ , \ u_{2k+1} \equiv 0 \ [4]$.

3. أ- بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ 2u_n = 5^{n+2} + 3$.

ب- استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ 2u_n \equiv 28 \ [100]$.

4. حدد رقمي الوحدات والعشرات في الكتابة في النظمة ذات الأساس 10 للعدد u_n.
5. تحقق من أن القاسم المشترك الأكبر لحدين متتابعين من المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هو عدد ثابت وأعط قيمته.

التمرين 4 :

نعتبر في $\mathbb{Q}$ المعادلة :

$$(1) \ : \ 78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$$

حيث $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$.

1. نفترض أن $\frac{14}{39}$ حل للمعادلة (1).

أ- تحقق من أن : $14u + 39v = 1129$.

ب- باستعمال خوارزمية أقليدس ، محددا جميع مراحل الانجاز ، حدد زوجا (x,y) من عددين نسبيين بحيث :

$$(2) \ : \ 14x + 39y = 1$$

تحقق من أن $(-25,9)$ حل لهذه المعادلة.

حدد مجموعة حلول المعادلة (2).

جـ- استنتج حلا خاصا (u_0,v_0) للمعادلة :

$$(3) \ : \ 14u + 39v = 1129$$

حدد الحل العام للمعادلة (3).

د- حدد الأزواج (u,v) التي من أجلها يكون u هو أصغر عدد صحيح طبيعي ممكن.

2. أ- فكك العددين 78 و 14 إلى جداء عوامل أولية.

استنتج في $\mathbb{N}$ ، مجموعة قواسم 78 ومجموعة قواسم 14.

ب- ليكن $\frac{p}{q}$ ، عنصرا من $\mathbb{Q}$ ، حلا جذريا للمعادلة (1).

بين أن : $p\wedge q=1 \Rightarrow p \,/\, 14$ و $q \,/\, 78$.

جـ- حدد الأعداد الجذرية المرشحة لأن تكون حلولا للمعادلة (1)، و حدد الأعداد الموجبة منها.

التمرين 5 :

1. أ- حدد حسب زوجية العدد الصحيح الطبيعي n، العدد :

$$(n^2+1)\wedge(n+1)$$

ب- بين أن العدد n^2+1 ليس مربعا كاملا.

2. لتكن a و b و c أعدادا صحيحة طبيعية غير منعدمة بحيث :

$$a\wedge b=1 \text{ و } a(n^2+1)=b^2(n+1)$$

أ- بين أن $a\wedge b^2=1$، ثم أن $a\le n$ و $b\le n$.

ب- بين أن $(n^2+1)\wedge(n+1)=2$.

جـ- نضع $n^2+1=2p$ و $n+1=2q$ ، بحيث :

$$p\wedge q=1 \text{ و } (p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$$

بين أن : $a=q$ و $b^2=p$.

د- نفترض أن $b=a+1$. أحسب الأعداد a و b و c.

التمرين 6 :

1. أ- حدد، حسب قيم العدد الصحيح الطبيعي n، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 9.

ب- بين أن : $2005^{2005} \equiv 7 \,[9]$.

2. أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 10^n \equiv 1\,[9]$.

ب- ليكن N عددا صحيحا طبيعيا مكتوبا في نظمة العد ذات الأساس 10. ليكن S مجموع أرقام العدد N.

بين أن : $N\equiv S\,[9]$.

جـ- استنتج أن : $9 \,/\, S \Leftrightarrow 9 \,/\, N$.

3. نعتبر العدد $A=2005^{2005}$.

ليكن : B مجموع أرقام العدد A.

C مجموع أرقام العدد B.

D مجموع أرقام العدد C.

أ- بين أن : $A\equiv D\,[9]$..

ب- علما أن : $2005<10000$ ، بين أن A يكتب في نظمة العد العشري بأقل من 8020 رقما.

استنتج أن $B\le 72180$.

جـ- استنتج أن : $C\le 45$.

د- بملاحظة الأعداد الصحيحة الطبيعية الأصغر من 45، حدد عددا صحيحا طبيعيا m بحيث : $C\le m$ و $m\le 15$.

هـ- بين أن : $D=7$.

التمرين 7 :

1. أ- أحسب : $(1+\sqrt6)^2$ و $(1+\sqrt6)^4$ و $(1+\sqrt6)^6$.

ب- طبق خوارزمية أقليدس على العددين 847 و 342.

2. ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. نعتبر a_n و b_n العددين الطبيعيين المعرفين بما يلي : $(1+\sqrt6)^n=a_n+b_n\sqrt6$.

أحسب a_1 و b_1.

باستعمال السؤال(1.أ-) ، أعط تعبيرا آخر لكل من a_n و b_n.

أ- أحسب a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n.

ب- بين أنه إذا كان 5 لا يقسم a_n+b_n ، فإن 5 لا يقسم $a_{n+1}+b_{n+1}$ ، ثم بين أن لكل $n\in\mathbb{N}^*$، لدينا : 5 لا يقسم a_n+b_n.

جـ- بين أن : $a_n\wedge b_n=1 \Rightarrow a_{n+1}\wedge b_{n+1}=1$.

د- استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n\wedge b_n=1$.

التمرين 8 :

ليكن a و b عددين نسبيين بحيث $a\wedge b=1$.

نضع : $c=a^4+b^4$

1. أ- ليكن x عددا نسبيا .

بين أنه إذا كان x زوجيا ، فإن $x^4\equiv 0\,[16]$

بين أنه إذا كان x فرديا ، فإن $x^4\equiv 1\,[16]$

ب- استنتج أن : $c\equiv 1\,[16]$ أو $c\equiv 2\,[16]$.

2. ليكن p عددا أوليا قاسما للعدد c بحيث $2<p$.

أ- بين أن : $a\wedge p=1$.

ب- بين أن : $\exists k\in\mathbb{Z} \,/\, ka\equiv 1\,[p]$.

جـ- استنتج أن : $\exists q\in\mathbb{Z} \,/\, q^4+1\equiv 0\,[p]$.

التمرين 9 :

1. حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E)\ :\ 3x-2y=1$

2. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

أ- بين أن الزوج $(14n+3,21n+4)$ حل للمعادلة (E).

ب- استنتج أن العددين $14n+3$ و $21n+4$ أوليان فيما بينهما.

3. ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$

أ- بين أن : $d=1$ أو $d=13$.

ب- بين أن : $d=13 \Leftrightarrow n\equiv 6\,[13]$.

4. من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n\ge 2$ ، نضع :

$$A=21n^2-17n-4 \text{ و } B=28n^3-8n^2-17n-3$$

أ- بين أن العددين A و B قابلان للقسمة على $n-1$ في $\mathbb{Z}$.

ب- حدد حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .